

ÁREA DE ESTUDO: CÓDIGO 19
Cálculo, Álgebra e Análise Real

01. (20 pontos) Mostre que a equação diferencial não linear $(\cos y)y' + 2\operatorname{sen} y = -2t$ (1) pode ser transformada em uma equação diferencial linear e determine uma solução para a equação (1).

02. (20 pontos) Seja P um espaço vetorial com produto interno. O conjunto $X \subset P$ é ortonormal se, dados $u, w \in X$, tem-se $\langle u, w \rangle = 0$ se $u \neq w$ e $\langle u, w \rangle = 1$ se $u = w$. Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_{2013}\} \subset P$ uma base ortonormal. Mostre que, para quaisquer $u, w \in P$, tem-se

$$\langle u, w \rangle = \sum_{i=1}^{2013} \langle u, v_i \rangle \langle w, v_i \rangle.$$

03. (20 pontos) Considere a sequência (a_n) , dada por $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$

Mostre que

a) (7 pontos) (a_n) é monótona;

b) (7 pontos) (a_n) é limitada;

c) (6 pontos) (a_n) é convergente e determine seu limite.

04. (20 pontos) O conjunto G das funções reais bijetoras é um grupo em relação à operação composição de funções. Para cada par de números reais \underline{a} e \underline{b} , com \underline{a} diferente de zero, considere a função real $f_{\underline{a}, \underline{b}}$, dada por $f_{\underline{a}, \underline{b}}(x) = \underline{a}x + \underline{b}$. Mostre que o conjunto H de todas as funções reais $f_{\underline{a}, \underline{b}}$, definida anteriormente, é um subgrupo de G .

05. (20 pontos) Sejam g e f funções reais, respectivamente, derivável e contínua no ponto \underline{a} diferente de zero, tais que $g(x) = xf(x)$ para todo número real x . Mostre que f é derivável em \underline{a} .