

**ÁREA DE ESTUDO: CÓDIGO 04**

**Matemática**

**01. (25 pontos)** Diga, **justificando**, se cada uma das afirmações seguintes é **verdadeira** (V) ou **falsa** (F).

a) (5 pontos) A sentença aberta “ $n^2 + 2$  é um múltiplo de 3 ou  $3n + 7$  é um quadrado perfeito” é uma condição universal no conjunto dos números inteiros positivos.

b) (5 pontos) Se  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ , então o operador linear sobre  $\mathbb{R}^4$ , cuja matriz é  $P$ , é injetivo.

c) (5 pontos) Se  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, \frac{x^2}{8} \leq y \leq \frac{1}{x}, y \leq e^{x-1}\}$ , então o volume do sólido de revolução obtido, ao girar a região  $R$  em torno do eixo  $x$ , é igual a  $\pi \left( \frac{1}{2e^2} - \frac{9}{10} \right)$ .

d) (5 pontos)  $x = e^{-2}$  e  $x = 1$  são, respectivamente, ponto de máximo local e ponto de mínimo local da função real  $f$ , definida para números reais positivos, dada por  $f(x) = \frac{e^2 x (\ln x)^2}{4}$ .

e) (5 pontos) A função real de uma variável real  $g$ , dada por  $g(x) = e^x - x^2 + 4$ , tem um único zero no intervalo  $[-3, -2]$ .

**02. (20 pontos)** Para  $X = \{0, 1\}$ , seja  $A = X \times X$ . Defina a relação  $\mathfrak{R}$  em  $A$  por  $(a, b) \mathfrak{R} (c, d)$  se, e somente se,

- (i)  $a < c$ , ou
- (ii)  $a = c$  e  $b \leq d$ .

a) (8 pontos) Prove que  $\mathfrak{R}$  é uma ordem parcial para  $A$ .

b) (4 pontos) Determine todos os elementos minimais e maximais para esta ordem parcial.

c) (4 pontos) Existe um elemento mínimo? Existe um elemento máximo?

d) (4 pontos) Esta ordem parcial é uma ordem total?

**03. (15 pontos)** Considerando-se a função real  $f$ , definida para números reais positivos, dada por  $f(x) = x - \frac{\ln x}{5}$ , faça o que se pede.

a) (10 pontos) Apresente, caso existam, os extremos absolutos de  $f$ .

b) (5 pontos) Mostre que  $x > \ln \sqrt[5]{x}$ , para todo número real positivo  $x$ .

**04. (20 pontos)** Sendo  $E_1$  e  $E_2$  espaços vetoriais de dimensão finita, tais que  $\dim(E_1) = \dim(E_2)$  e  $L$  uma transformação linear de  $E_1$  em  $E_2$ , mostre que

- a) (5 pontos) Se  $L$  é sobrejetiva, então  $L$  é bijetiva.
- b) (5 pontos) Se  $L$  é injetiva, então  $L$  é bijetiva.
- c) (5 pontos) Se  $L$  é bijetiva, então  $L$  leva bases de  $E_1$  em bases de  $E_2$ .
- d) (5 pontos) Se  $L$  leva bases de  $E_1$  em bases de  $E_2$ , então  $L$  é sobrejetiva.

**05. (20 pontos)** Com relação ao ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados, faça o que se pede.

- a) (10 pontos) Mostre que ajustar um polinômio de grau  $n$ ,  $n \geq 1$ , ao conjunto de pontos  $x_k, y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  e  $m > n$ , corresponde a resolver o sistema linear  $Ax = b$

de ordem  $n+1$ , onde  $A = (a_{ij})$ ,  $b = (b_i)$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ , com  $a_{ij} = \sum_{k=0}^m x_k^{i+j-2}$  e

$$b_i = \sum_{k=0}^m x_k^{i-1} y_k.$$

- b) (10 pontos) Sendo  $f$  a função real de uma variável real dada por  $f(x) = 2^x$ , determine a reta que se ajusta ao conjunto de pontos  $k, f(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .