INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE GESTÃO DE PESSOAS
DEPARTAMENTO DE INGRESSOS/PROEN
CONCURSO PÚBLICO – CARREIRA DOCENTE – EDITAL Nº 03/GR-IFCE/2013

ÁREA DE ESTUDO: CÓDIGO 02
Matemática Aplicada, Álgebra Linear e Cálculo Diferencial e Integral

01. (20 pontos) Seja $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear definido em $\mathbb{R}^n$ com a norma e o produto interno usual.

a) (10 pontos) Mostre que, se A é operador ortogonal, isto é, $|Av| = |v|$, para todo v em $\mathbb{R}^n$, então A é uma bijeção linear (isomorfismo linear) e sua inversa é o operador adjunto de A.

b) (10 pontos) Mostre que, se A é autoadjunto, sua matriz, em qualquer base ortonormal, é simétrica.

02. (20 pontos) Dado um espaço vetorial E, com produto interno $\langle\, , \rangle$, definimos a norma induzida pelo produto interno por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$, para todo $u \in E$.

a) (7 pontos) Mostre que $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$. (Desigualdade de Cauchy-Schwartz)

b) (6 pontos) Mostre que $\langle\, f, g\,\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ define um produto interno em $C([a,b])$, espaço das funções contínuas definidas em $[a,b]$.

c) (7 pontos) Sendo f e g contínuas em $[a,b]$, conclua que $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f(x)^2\,dx \int_a^b g(x)^2 dx$ e, se f é positiva em $[a,b]$, $\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2(\int_a^b f(x)dx)^{-1}$.

03. (20 pontos) Sejam $\sum a_n$e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Prove que

a) (6 pontos) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge.

b) (7 pontos) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$, então $\sum a_n$ converge, se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

c) (7 pontos) $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$ e conclua que $\sum \frac{1}{n^r}$ converge para $r \geq 2$.

04. (20 pontos) Uma função $f: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, definida num intervalo, é dita convexa, quando, para $a < x < b$ arbitrário em I, o ponto $\big(x, f(x)\big)$ do gráfico f está situado abaixo da secante (segmento de reta) que liga os pontos $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$, ou seja, $f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ ou $f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b)$.

a) (5 pontos) Seja a função $f: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ definida num intervalo. Prove que f é convexa se, e somente se, para quaisquer a, b em I e $0 \leq t \leq 1$ vale $f\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

b) (10 pontos) Seja $f:(c,d) \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Prove que f é convexa, se, e somente se, f' for não decrescente. Assuma que $f''(x)$ existe para todo $x \in (c,d)$ e conclua que f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (c,d)$.

c) (5 pontos) Mostre que a função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^x$, é convexa. Deduza daí a desigualdade $a^\alpha b^\beta \leq \alpha.a + \beta.b$, para α, β, a, b não negativos, com $\alpha + \beta = 1$.

05. (20 pontos) Tipos especiais de EDO.

a) (6 pontos) *Equações homogêneas.* Seja $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. As equações da forma $x' = f\left(\frac{x}{t}\right), t \neq 0$ são chamadas homogêneas. Prove que a mudança de variáveis $x = yt$ transforma equações homogêneas em equações com variáveis separáveis. Resolva a equação $x' = \frac{x+t}{t}, x(1) = 0$.

b) (6 pontos) *Equação de Bernoulli.* Mostre que a mudança de variáveis $x^{1-n} = y$ transforma a equação de Bernoulli $x' = a(t)x + c(t)x^n$ numa equação linear. Determine todas as soluções da equação $x' = x + e^{-3t}x^4$.

c) (8 pontos) *Equação de Riccati.* A equação do tipo $x' = r(t)x^2 + a(t)x + b(t)$ (1) chama-se equação de Riccati. Mostre que, se f_1 for solução de (1), então $f = f_1 + f_2$ é solução de (1), se, e só se, f_2 for uma solução da equação de Bernoulli $y' = \left(a(t) + 2r(t)f_1(t)\right)y + r(t)y^2$.

Ache a solução de $x' = x + tx^2 - 1 - t$, sabendo-se que esta equação admite $f_1(t) = 1$ como solução.